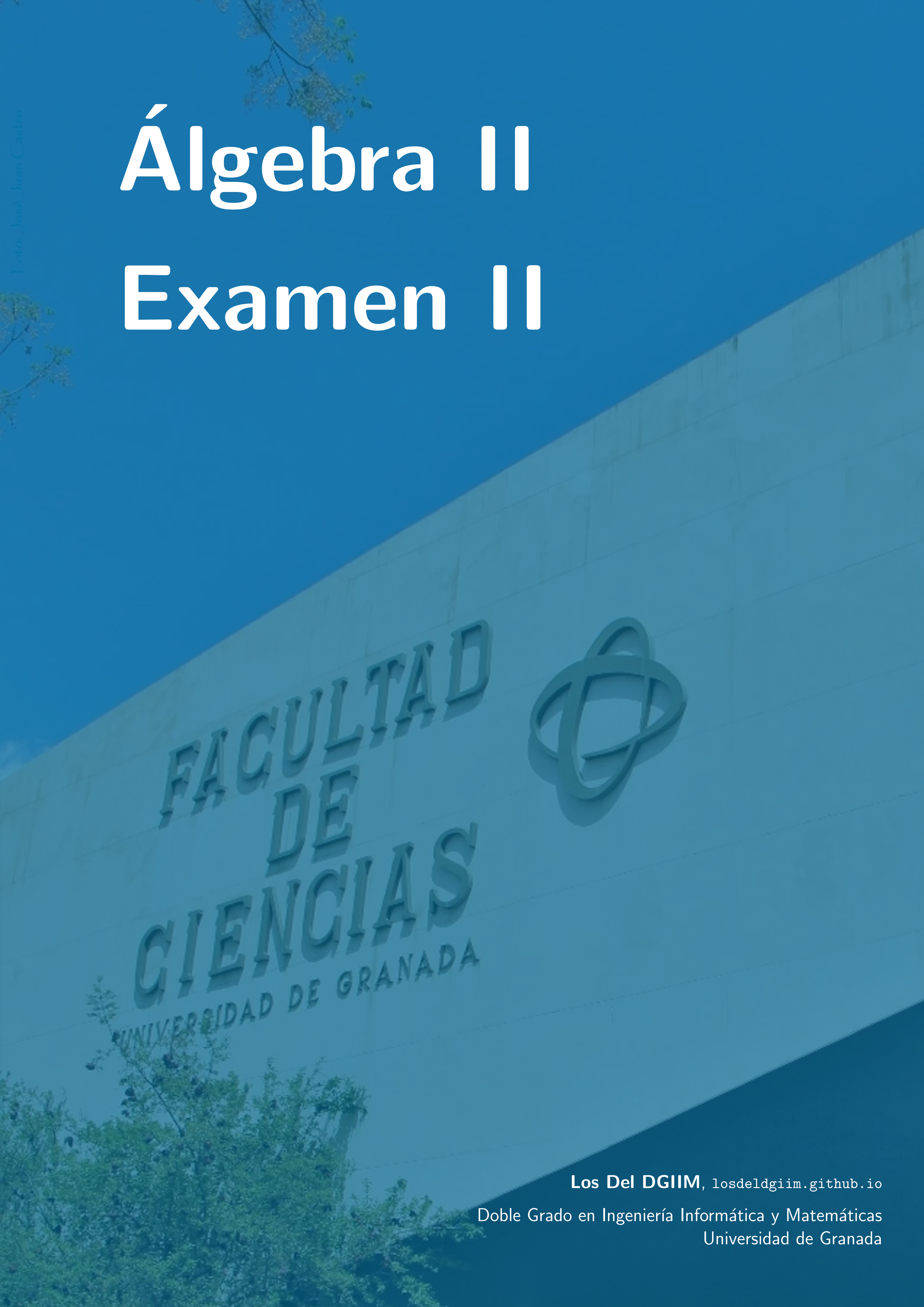
Álgebra II
Examen II



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra II
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2025

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Aurora del Río Cabeza.

Descripción Parcial I.

Fecha 26 de marzo del 2025.

Duración Dos partes de 45 minutos.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Responda **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las siguientes cuestiones, junto con una breve justificación de la respuesta (todo grafo mencionado es simple: sin lazos ni lados paralelos).

1. Todo grafo tiene dos vértices con el mismo grado.
2. Todo grafo bipartido completo tiene dos componentes conexas no vacías.
3. Sea $f : G \to H$ un monomorfismo de grupos con H un grupo abeliano, entonces G es abeliano.
4. Sean $H_1, H_2 < G$ dos subgrupos con $|H_1|$ y $|H_2|$ primos relativos, entonces $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.
5. Sean $H, K < G$ dos subgrupos, entonces HK es un subgrupo de G.
6. Si dos grupos tienen dos subgrupos propios isomorfos, entonces los grupos son isomorfos.
7. En un grupo cíclico, todo elemento que no es el neutro es un generador.
8. Sea $f : G \to G$ con G un grupo y $x \in G$, la aplicación $f_x(y) = xyx^{-1}$ es un automorfismo.
9. Sea G un grupo y $H \subseteq G$, si H es cerrado para la operación de G, entonces H es un subgrupo de G.
10. Si en un grupo G, $a = a^{-1}$, entonces a es el elemento neutro del grupo.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Fue el ejercicio 41 de la relación 1 (la de grafos).

Ejercicio 1. Contestamos a cada pregunta, razonando la respuesta:

1. Todo grafo tiene dos vértices con el mismo grado.

   Verdadero. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n$, los vértices de G pueden tomar los grados del conjunto $GR(n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Sin embargo, si un vértice se conecta con todos los demás (es decir, tiene grado $n-1$), entonces no podrá haber vértices de grado 0; y viceversa: si un vértice tiene grado 0 (no se conecta con ningún otro), entonces no podrá haber vértices de grado $n-1$. Por tanto, tendremos que:

   $$|\{gr(u) \mid u \in V\}| < n$$

   Por el Lema del Palomar, como cada vétice tiene que tener un grado (tenemos n vértices y $n-1$ grados posibles), concluimos que $\exists u, v \in G$ con $gr(u) = gr(v)$.

2. Todo grafo bipartido completo tiene dos componentes conexas no vacías.

   Falso. Por ejemplo, $K_{2,2}$ es un grafo bipartido completo pero solo tiene una componente conexa (ya que es conexo), tal y como vemos en la Figura 1.

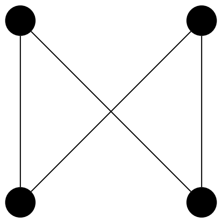
   

   Figura 1: Grafo $K_{2,2}$.

3. Sea $f : G \to H$ un monomorfismo de grupos con H un grupo abeliano, entonces G es abeliano.

   Verdadero. Sean $a, b \in G$:

   $$f(ab) = f(a)f(b) = f(b)f(a) = f(ba) \Longrightarrow ab = ba$$

4. Sean $H_1, H_2 < G$ dos subgrupos con $|H_1|$ y $|H_2|$ primos relativos, entonces $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

   Verdadero. Veamos las dos inclusiones:

   $\supseteq$) Como H_1 y H_2 son subgrupos, tenemos que $1 \in H_1 \cap H_2$.

   $\subseteq$) Sea $x \in H_1 \cap H_2$, entonces $x \in H_1$ y $x \in H_2$, con lo que:

   $$\left.\begin{array}{r} O(x) \mid |H_1| \\ O(x) \mid |H_2| \\ mcd(|H_1|, |H_2|) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow O(x) = 1$$

5. Sean $H, K < G$ dos subgrupos, entonces HK es un subgrupo de G.

Falso. Por ejemplo, en S_4 consideramos:

$$H = \langle (1\ 2) \rangle = \{1, (1\ 2)\} < S_4$$
$$K = \langle (2\ 3\ 4) \rangle = \{1, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\} < S_4$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} HK &= \{1 \cdot 1, 1(2\ 3\ 4), 1(2\ 4\ 3), (1\ 2) \cdot 1, (1\ 2)(2\ 3\ 4), (1\ 2)(2\ 4\ 3)\} \\ &= \{1, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3)\} \\ KH &= \{1 \cdot 1, 1(1\ 2), (2\ 3\ 4)1, (2\ 3\ 4)(1\ 2), (2\ 4\ 3)1, (2\ 4\ 3)(1\ 2)\} \\ &= \{1, (1\ 2), (2\ 3\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\} \end{aligned}$$

Y vemos que $HK \neq KH$, como:

$$KH \neq HK \iff HK \text{ no es un subgrupo}$$

Concluimos que HK no es un subgrupo. Además, vemos que $(1\ 2\ 3\ 4) \in HK$ pero:

$$(1\ 2\ 3\ 4)^{-1} = (1\ 4\ 3\ 2) \notin HK$$

6. Si dos grupos tienen dos subgrupos propios isomorfos, entonces los grupos son isomorfos.

   Falso. Por ejemplo, si consideramos V, el grupo de Klein y S_3, tenemos que:

$$H = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle = \{1, (1\ 2)(3\ 4)\} < V$$
$$K = \langle s \rangle = \{1, s\} < S_2$$

   Son isomorfos, basta considerar $f : H \to G$ de forma que:

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1 \\ (1\ 2)(3\ 4) &\longmapsto s \end{aligned}$$

   Para tener el isomorfismo, pero V y S_3 no son isomorfos, ya que:

$$|V| = 4 \neq 6 = |S_3|$$

7. En un grupo cíclico, todo elemento que no es el neutro es un generador.

   Falso. Por ejemplo, en:

$$C_4 = \langle x \mid x^4 = 1 \rangle = \{1, x, x^2, x^3\}$$

   Tenemos que $1 \neq x^2 \in C_4$, con:

$$\langle x^2 \rangle = \{1, x^2\} \neq C_4$$

8. Sea $f : G \to G$ con G un grupo y $x \in G$, la aplicación $f_x(y) = xyx^{-1}$ es un automorfismo.

   Verdadero. Vemos que su dominio coincide con su codominio. Veamos que es un isomorfismo:

- Para ver que es un homomorfismo:

$$f_x(yz) = xyzx^{-1} = xyx^{-1}xzx^{-1} = f_x(y)f_x(z) \qquad \forall y, z \in G$$

- Para ver que es inyectiva, sean $y, z \in G$ de forma que:

$$f_x(y) = xyx^{-1} = xzx^{-1} = f_x(z)$$

  Entonces, aplicando dos veces la propiedad cancelativa, tenemos que:

$$xyx^{-1} = xzx^{-1} \Longrightarrow xy = xz \Longrightarrow y = z$$

- Para ver que es sobreyectiva, sea $y \in G$, tomamos:

$$z = x^{-1}yx$$

  Y tenemos que:

$$f_x(z) = f_x(x^{-1}yx) = xx^{-1}yxx^{-1} = y$$

Concluimos que f_x es un automorfismo.

9. Sea G un grupo y $H \subseteq G$, si H es cerrado para la operación de G, entonces H es un subgrupo de G.

   Falso. Por ejemplo, $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo y $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ es un conjunto de forma que:

$$m + n \in \mathbb{N} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

   Es decir, que es cerrado para la suma de $\mathbb{Z}$. Sin embargo, $\mathbb{N}$ no es un grupo, por no ser cerrado para opuestos.

10. Si en un grupo G, $a = a^{-1}$, entonces a es el elemento neutro del grupo.

    Falso. Por ejemplo, en S_3 tenemos que $s \in S_3$ con $s^{-1} = s$ pero $s \neq 1$.